Argomenti delle singole lezioni del corso di Analisi Matematica 2 (Ingegneria Edile-Architettura, A.A. 2020-21)

NB. Le indicazioni bibliografiche si riferiscono al libro di testo.

Lezione nr. 1, 21/9/2020. Funzioni di più variabili a valori scalari e vettoriali (Cap 10; per ora ho saltato il paragrafo 10.2.4).
Concetti di base: dominio naturale, grafico, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, intorno di un punto in $\mathbb{R}^n$, intorno del punto all'infinito, punto di accumulazione, punto isolato, punti interni/esterni/di frontiera, insiemi aperti e chiusi,
Definizione limite con qualche primo esempio di calcolo.

Esercizi utili: 10.1-3-4-5

Lezione nr. 2, 22/9/2020. (Cap 10; per ora ho saltato il paragrafo 10.3.3)

Il limite di una funzione vettoriale si riduce ai limiti di funzioni scalari. Funzioni continue. Esempi di limiti. Successioni in $\mathbb{R}^n$. Teorema ponte e la sua consequenza (Teorema 10.16) e l'applicazione alla non-esistenza di limiti. Esempio 10.20.
Come usare correttamente le coordinate polari nel calcolo di limiti.

Esercizi utili: 10.13, 10.15, 10.16a,b,c,d

Lezione nr. 3, 25/9/2020.

Cap 10: l'esempio 10.20 rivisto (per ora ho saltato il concetto di insieme compatto nel paragrafo 10.3.1 e i paragrafi 10.3.2-3).

Cap 11:
Concetto di miglior approssimazione lineare, piano tangente nel caso di due variabili.
Derivata direzionale e parziale. Gradiente. Calcolo delle derivate parziali. Funzioni derivabili.
Proprietà fondamentali delle funzioni differenziabili (teorema 11.4). In particolare funzioni differenziabili sono sempre continue e derivabili.
L'esempio 10.20 (vedi esempio 11.6) mostra che una funzione derivabile non è sempre continua. Perciò derivabilità non implica differenziabilità.

Esercizi utili: 11.3-5-6.

Lezione nr. 4, 28/9/2020. (Cap 11)

Dimostrazione del teorema 11.4.
Direzione di massima (de)crescita: prima interpretazione geometrica del gradiente
Teorema del differenziale totale (senza dimostrazione)
Teorema del valor medio su un segmento (con dimostrazione)
Derivate direzionali e parziali del secondo ordine, funzioni due volte differenziabili, il teorema di Schwarz (senza dimostrazione).

Esercizi utili: 11.4.

Lezione nr. 5, 29/9/2020. (Cap 11)

Matrice hessiana $H_f(x_0)$ (simmetrica se f è 2 volte differenziabili), la formula $D_{vw}f(x_0) = < H_f(x_0)v, w >$, le notazioni $f \in C^1(X)$, $f \in C^2(X)$.

Polinomio di Taylor del secondo ordine, teorema di Peano (senza dimostrazione rigorosa), formula di Lagrange per "il resto" (con dimostrazione).

Esercizi utili: 11.9-10.

Lezione nr. 6, 2/10/2020. (Cap 11)

Insiemi convessi. Funzioni convesse e concave in insiemi convessi. Proprietà elementari di funzione convesse, in particolare il confronto con le miglior approssimazioni lineari.

L'utilizzo delle derivate seconde per lo studio della convessità di una funzione si basa sul resto di Lagrange che contiene la matrice hessiana.

Intermezzo: proprietà delle matrici simmetriche M: esistenza di n autovalori $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ e di una base ortonormale che consiste di autovettori $v_1, \dots, v_n$. Le disuguaglianze $\lambda_1 \|v^2\| \leq \langle Mv, v \rangle \leq \lambda_n \|v\|^2$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

Interpretazione: se la matrice hessiana è definita positiva (negativa) in A (ovvero tutti autovalori sono strettamente positivi) la funzione è strettamente convessa (concava) in A, se se non è semi-definita positiva né semi-definita negativa la funzione non è convessa né concava in A.

Il caso MOLTO particolare di due variabili ($n = 2$): le caratterizzazioni della convessità in termini dei segni di λ_1 e λ_2 si traducono in termini di determinante e traccia della matrice hessiana.

Lezione nr. 7, 5/10/2019. (Cap 11)

Punto critico, la natura dei punti critici: punto di max/min locale e punto di sella. Esercizi: trovare punti di estremo di funzioni scalari in insiemi aperti

Esercizi utili: 11.11-12-13-14-15-18.

Lezione nr. 8, 6/10/2019.

Cap 11: esempio 11.24, il caso di un punto critico dove det $H_f = 0$.
Cap 10: definizione di insiemi compatti; un insieme in $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Il Teorema di Weierstrass (teorema 10.10).
Cap 11: caloclo differenziale di funzioni a valori vettoriali, la matrice jacobiana, la regola della catena (teorema 11.29)
Cap 12: definizione di curva; curva chiusa, semplice, piana, di Jordan. Derivata. L'esempio $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, dove $\gamma(0) = \gamma'(0) = (0,0)$ e non esiste la retta tangente alla curva in $(0,0)$: la derivabilità di γ non implica l'esistenza della retta tangente alla curva se la derivata γ' si annulla!

Esercizi utili: 11.17, 12,1

Lezione nr. 9, 9/10/2019. (Cap 12)

Cambiamento di parametro, curve equivalenti con lo stesso verso o con verso opposto
Il parametro d'arco $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$
Integrali di funzioni vettoriali di una variabile: $\int_a^b f(t)\, dt$
La formula $\gamma(b) = \gamma(a) + \int_a^b \gamma'(t)\, dt$
Curve rettificabili, esempio di una curva non rettificabile (un cenno all'idea di base).

Lunghezza di una curva rettificabile. Lunghezza di una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se γ è di classe C^1 e la sua indipendenza della parametrizzazione (nel caso di curve equivalentI) con dimostrazione.

Esercizi utili: 12.4-5-6

Lezione nr. 10, 12/10/2019. (Cap 12)

Curve regolari a tratti, di classe C^1 a tratti
Integrali curvilinei di prima specie: $\int_\gamma f\, ds$. $\int_{\gamma_1} f\, ds = \int_{\gamma_2} f\, ds$ se γ_1 e γ_2 sono equivalenti. Interpretazione in termini di area di una "parete curvata"
Integrali curvilinei di seconda specie: $\int_\gamma < F, T > ds = \int_\gamma \omega$, dove $\omega =< F, dx >$ è una forma differenziali. Motivazione fisica (lavoro compiuto da una forza). Dipendenza dal verso. Esempi.
Orientazione positiva/negativa di una curva di Jordan
Forme differenziali esatte, funzione potenziale, interpretazione fisica: forze conservative.
Calcolo dell'integrale di una forma differenziale esatta.
Forme differenziali chiuse, campi vettoriali irrotazionali
Forme differenziali esatte sono chiuse,

Esercizi utili: 12.7-8